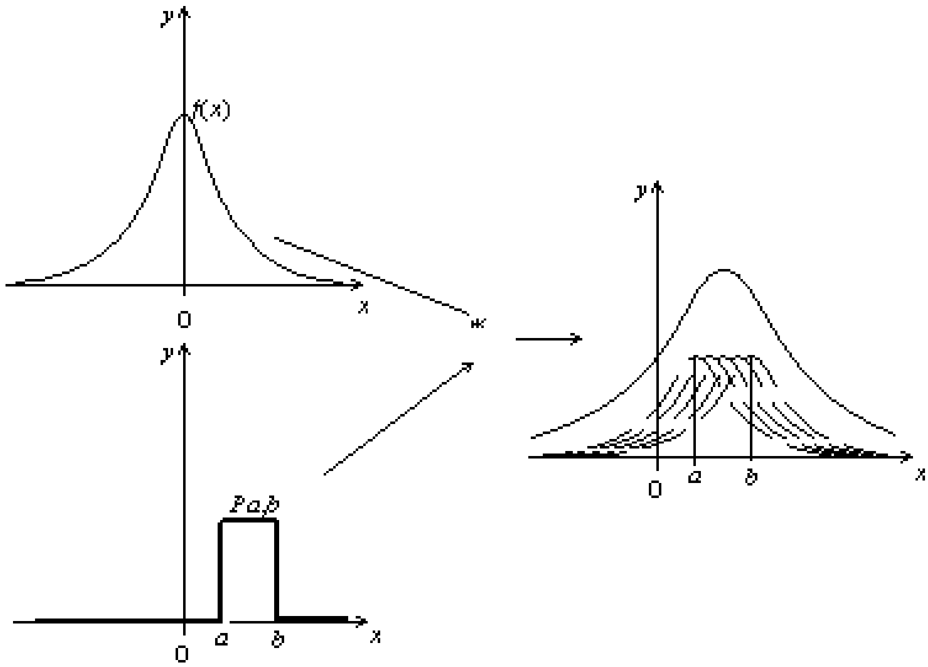
COURS TRAITEMENT DU SIGNAL

Cours 1ère Année : Télécommunication TEL1



Frédéric LAUNAY le 12/11/2007

Département R&T – IUT de Poitiers site de Chatellerault

Traitement du signal

Le traitement du signal est devenu une science incontournable de nos jours : Toutes applications de mesures, de traitement d'information mettent en œuvre des techniques de traitement sur le signal pour extraire l'information désirée.

Initialement destiné à extraire le signal dans un bruit lors de mesures (capteurs), le traitement du signal est largement appliqué en Télécommunication dans des applications diverses et variées. Nous pouvons citer :

- la protection d'information contre le bruit telles que les techniques pour réduire le Taux d'erreur ou pour contrer les effets du canal (technique d'égalisation)
- le développement d'applications électroniques et l'évolution aisée vers de nouvelles fonctionnalités telles que le filtrage sélectif, la mise en place de techniques variées de modulation/démodulation, …

L'objectif principal de ce cours est la caractérisation d'un signal dans le domaine temporel et fréquentiel pour aboutir à des modèles mathématiques. La description mathématique des signaux permet de concevoir et de caractériser des systèmes de traitement de l'information. Le bruit représentera tout « signal » ou phénomène perturbateur

Nous avons découpé ce cours en quatre chapitres, le premier chapitre est une sensibilisation à la décomposition d'un signal en série de Fourier. Aucune notion mathématique ne sera abordée dans ce premier module, l'intuition physique étant mise en avant pour appréhender les phénomènes.

Dans le deuxième chapitre, nous allons classifier les signaux et définir des notions de puissances. Nous aborderons les phénomènes aléatoires et des signaux dits déterministe.

Dans le troisième chapitre, nous aborderons des concepts plus mathématiques de la série de Fourier, de la transformée de Fourier. Un rappel sera fait avec le deuxième chapitre dans la mesure des signaux (Moyenne, puissance et variance).

Enfin dans le 4ème chapitre, nous aborderons des applications d'échantillonnage, de filtrage et de convolution. Bien que des formules mathématiques seront développées dans ce chapitre, nous insisterons sur les représentations physiques. Les mathématiques appuieront les concepts abordés dans ce cours.

Chapitre 1 :
Traitement du signal : Intuition Physique

Informations générales

1h30 de cours
1h30 de TD : TD n°1

Descriptions du chapitre

Approche intuitive sur la représentation temporelle et fréquentielle
Définition de l'analyse spectrale
Vibration d'une corde, longueur d'onde et fondamentale

« L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques » « [. . .] L'analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle-même [. . .] Son attribut principal est la clarté [. . .] Elle [. . .] semble être une faculté de la raison humaine, destinée à suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens ». (Discours préliminaire à la théorie analytique de la chaleur par Joseph FOURIER).

I. Introduction

Avant de commencer le cours sur le traitement du signal, il est opportun de définir la notion de signal, telle que vous la trouverez sur Wikipédia et autres dictionnaires

« Un **signal** est un message simplifié et généralement codé. Il existe sous forme d'objets ayant des formes particulières.

- Les **signaux lumineux** sont employés depuis la nuit des temps par les hommes pour communiquer entre eux à distance.
- Le **signal électrique** est une des formes les plus récentes de signal.
- Un **signal** dans le domaine informatique et de la communication inter-processus.

On a l'habitude de représenter un signal par une fonction continue dans le temps et de visualiser le signal sur un oscilloscope ou un appareil représentant la variation d'amplitude d'un phénomène en fonction du temps (cardiogramme, sismographe, microphone, …). »

I-1) Observations des phénomènes nous entourant

Pour simplifier l'étude nous allons prendre l'exemple d'une seule corde (rmq : La production des sons à partir des cordes a été étudiée depuis Pythagore (vers 582 - 507 av.J.-C.) : en pinçant une corde, la vibration de la corde est transmise à l'air environnant, et l'air transmet la vibration de proche en proche jusqu'à votre oreille qui reçoit la vibration du début un peu transformée, mais encore reconnaissable. Tous ces phénomènes de transmission de "proche en proche" sont dus aux phénomènes d'onde :

Avant (il y a une bosse) :

Après (la bosse est plus loin) :

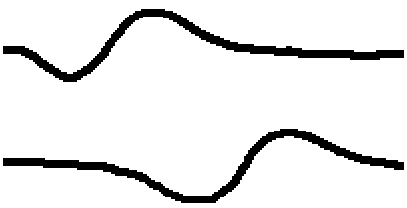


Figure 1 : Evolution de l'onde en fonction de la distance

On peut noter le même phénomène en lançant un caillou dans de l'eau. On observe des ronds qui augmentent de taille. Dans ce cas-là, c'est la hauteur de l'eau à un endroit qui change la hauteur de l'eau à côté de cet endroit. Dans le cas de l'air c'est la pression de l'air à un endroit qui change la pression de l'air à côté de cet endroit.

I-2 Exemple de la corde d'une guitare.

Si on fait vibrer une corde suffisamment tendue (souvent en nylon ou en acier), elle fait aussi vibrer l'air qui se trouve à côté et produit un son. Mais ce son est très faible. C'est pour ça que les instruments à cordes ont des résonateurs (table d'harmonie).
La corde d'une guitare est attachée aux deux extrémités, lorsqu'on écarte la corde à vide, la déformation de la corde forme une onde entre les deux extrémités (un fuseau).

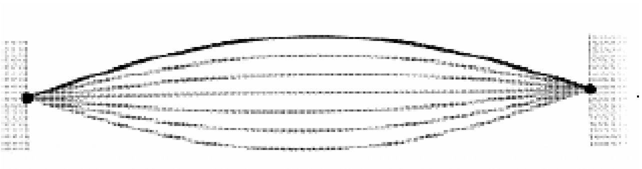


Figure 2 : Représentation d'un fuseau, variation de l'amplitude de l'onde sur une corde fixée aux deux extrémités

Sur le graphe ci-dessus, la corde présente deux noeuds (à ses extrémités) et un ventre appelée fuseau.
Pour obtenir une telle vibration, revenons sur la guitare :

Figure 3 : Elément d'une guitare

La tête : Elle supporte les chevilles sur lesquelles sont fixées une des extrémité des cordes, permettant ainsi de régler la tension des cordes.

Le manche : Il est composé de frettes (ou sillets), petites barrettes de métal ou de bois qui servent à obtenir la longueur précise de la corde vibrante entre sillet de chevalet et la frette pincée.

Le chevalet transmet les vibrations de la corde vibrante à la table d'harmonie. Il doit pouvoir retransmettre à la table, sans trop de déformations, le contenu ***fréquentiel*** que lui communique la corde.

La table d'harmonie est la surface supérieure de la caisse. Celle-ci est percée d'une ouïe, appelée rosace" dans le cas de la guitare. Cette rosace permet la projection du son, contenu dans la caisse de résonance, hors de l'instrument.

Par conséquent, la vibration d'une corde de guitare produit un son [1].
On obtient des sons plus ou moins graves :

Selon l'épaisseur de la corde : Les cordes épaisses produisent un son grave. Les cordes fines, un son aigu. C'est pour ça que les instruments à cordes ont souvent plusieurs cordes de différentes épaisseurs. Chacune d'elles produit une note différente.

Selon la longueur de la corde : Une corde dont la longueur est le double d'une autre, produit un son doublement plus grave. Si la première corde produit un do, par exemple, la deuxième produit un do une octave plus grave.

Rmq : Les instruments à cordes ont souvent plusieurs cordes de la même longueur !
Sur la guitare, ainsi que sur tous les instruments de la famille du violon, les musiciens appuient sur le manche avec leurs doigts et réduisent la longueur de la corde. De cette façon, elle sonne comme si elle était plus courte et produit un son plus aigu.

Selon la tension de la corde : Plus de tension est synonyme de plus aigu, ainsi plus la corde est tendue et plus le son émis sera aigu. Les musiciens peuvent régler la tension des cordes de leurs guitares, grâce aux clefs (chevilles). Quand on pince une corde, celle-ci vibre avec une vitesse $V = \sqrt{F/\mu}$ où F est la force de tension de la corde en Newton et μ est la masse de la corde par unité de longueur.

I-3 Vibration : Les ondes stationnaires

Dans la corde, les ondes sont **stationnaires.** Les ondes stationnaires s'établissent si la longueur L de la corde est un multiple de la demi longueur d'onde λ. La longueur L étant fixée (corde non pincée ou entre la frette pincée et le sillet de chevalet), on crée un son dont la longueur d'onde λ est proportionnelle à la longueur L. Or, la fréquence est inversement proportionnelle à la longueur d'onde selon la formule suivante (à retenir) dans le cas général:

$$\lambda = Tc = \frac{c}{f}$$

c est la célérité en m/s. Dans le cas de la corde, on parlera plutôt de célérité des ondes méca-nique ce qui correspond à la vitesse de vibration mécanique V. La formule devient alors :

$$\lambda = \frac{V}{f}$$

Pour la guitare, le mouvement des cordes est représenté par un seul fuseau dont les deux noeuds sont le chevalet et la frette choisie par le doigt du guitariste. Mais, il peut se produire plusieurs fuseaux lorsque la corde est pincée.

[1] http://www.capcanal.com/couleurs/pages/son_cordes.htm

Donc quand vous faites frétiller la corde, il y a des ondes stationnaires qui se forment dedans. Chaque onde est caractérisée par un entier qui dit combien elle a de ventres. Enfin, chaque onde sonne différemment à votre oreille, parce qu'elles n'ont pas la même ***fréquence***.

Effet de la fréquence ?

Plus une onde est petite, plus elle vibre vite. On va même être plus précis : si l'onde est 2 fois plus petite, alors la fréquence (nombre de battements par seconde, on parle ici de fréquence bien plus grande que le nombre de battement de coeur par seconde qui est de l'ordre de 1) est 2 fois plus grande.
Reprenez l'équation précédente et vérifier cela.

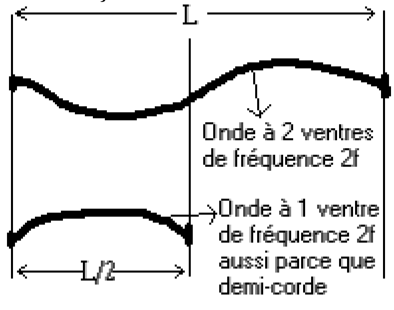
Donc, l'onde ayant deux ventres va être deux fois plus aiguë que l'onde ayant un ventre. On va mettre ça en symboles mathématiques. On note f_{la} fréquence de l'onde la plus grande, celle qui a un seul ventre. Cette fréquence f s'appelle la fondamentale. Alors l'onde à deux ventres va avoir pour fréquence 2 f_{la}, et plus généralement, l'onde ayant n ventres va avoir pour fréquence n fois f_{la}. Avec une corde à 110 battements par secondes, on aura des ondes de fréquences 110, 220, 330, 440 etc.

Pourquoi on n'entend qu'une seule note ?

En effet, on entend la fondamentale, et les harmoniques viennent donner un aspect, en quelque sorte habiller la fréquence fondamentale, ce qui donne un **timbre** au son. Ainsi, la différence entre un son de flûte et un son de guitare jouant la même note n'est autre que la composition en harmonique. Comme en cuisine : une pincée d'harmonique x2, un brin de noix d'harmonique x3... On assimile les harmoniques à la fondamentale parce que généralement elles sont faibles (trop faibles pour être des notes à part entière), mais aussi parce qu'elles sont synchronisées, en temps et en intensité avec la fondamentale.

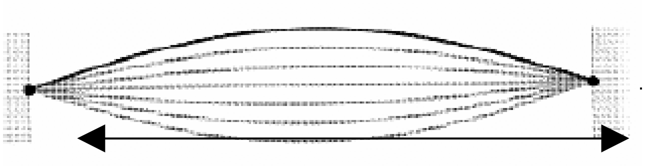
La fondamentale et les harmoniques

La fondamentale, vous savez c'est la fréquence la plus basse, et toutes les autres fréquences ce sont des harmoniques, **qui sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale**. D'ailleurs l'harmonique x1 est en fait la fondamentale. Tiens, je vous disais qu'une onde avec 2 ventres a une fréquence 2 fois plus grande qu'une onde ayant 1 seul ventre. Maintenant si on prend une corde deux fois plus courte que la première mais à part ça pareil que l'autre, même matériau et même tension (en effet plus la corde est tendue plus la note est aiguë) et qu'on se demande quelle est la fréquence de l'onde ayant un seul ventre dans la petite corde, on obtient quoi ? On obtient ça :



II. Théorie du traitement du signal : Série de Fourier

Jusqu'à présent, nous avons vu qu'un son ou une vibration entre deux points provoquait un son dont la fréquence était inversement proportionnelle à la longueur du fuseau.



On note L la longueur de la corde, comme il n'y a qu'un seul fuseau, la demi longueur d'onde $\lambda/2=L$ donc la fréquence résonnante est défini par $f=V/(2L)$, V étant la célérité.

Question : Sachant que la longueur d'un corde de guitare est de L=642 mm, que vaut la fréquence libre de la première corde si celle-ci est défini par une vitesse de vibration est de 106m/s

On a représenté le signal le long de la corde (donc en fonction de la distance), et on a montré que le signal présentait un nœud. On s'aperçoit que la représentation ci-dessus met en avant plusieurs fuseaux d'amplitudes différentes. En fait, lorsqu'on fait vibrer la corde, **a un instant donné**, l'amplitude de celle-ci est maximale puis décroît, s'annule, devient minimale puis s'accroît, …
Nous représentons ci-dessous l'évolution du son générée par une lame de diapason en fonction de la distance pour différents instants.

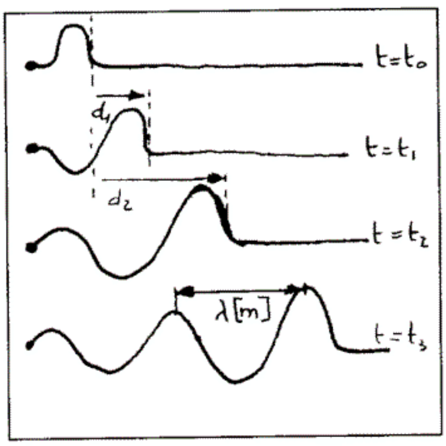


Figure 4 : Evolution de l'amplitude de l'onde en fonction de la distance à différents instants

Maintenant, regardons l'évolution de l'onde à une distance d fixée en fonction du temps :

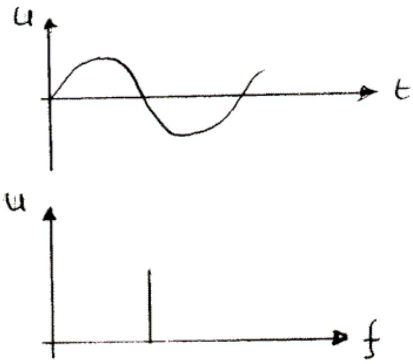


Figure 5 : Evolution de l'amplitude de l'onde à une distance d en fonction du temps/réponse fréquentielle

Dans le cas ou l'atténuation est nulle, voici la réponse temporelle et fréquentielle des signaux observées via un microphone sur un oscilloscope et un analyseur de spectre.

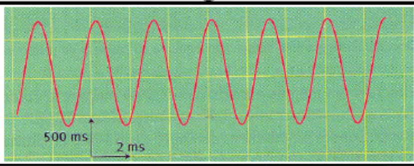
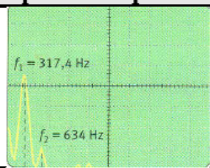
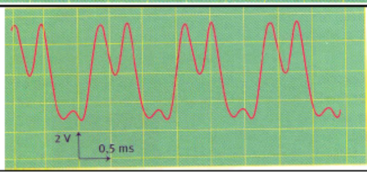
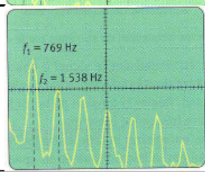
	Oscillogramme	Spectre fréquentiel
Diapason		
Guitare		

Figure 6 : Représentation à l'oscillo et à l'Analyseur de spectre de deux sons

Le diapason présente un signal sinusoïdal de fréquence 317,4 Hz que l'on observe facilement sur l'oscilloscope. On voit de plus sur l'analyseur de spectre un signal à 634Hz.

Le signal temporel généré par la guitare et mesuré par le microphone est plus complexe. Il est périodique tous les 2 carreaux et demi soit 1,25 ms environ. L'analyseur de spectre montre en effet une fréquence fondamentale de 769 Hz = 1/(1,3 ms) et des harmoniques.

II-1 Analyseur de spectre

Un analyseur de spectre est un appareil de mesure, qui représente un signal en fonction de sa fréquence. Alors qu'un oscilloscope représente l'amplitude d'un signal en fonction du temps, l'analyseur de spectre représente l'amplitude d'un signal en fonction de sa fréquence.

EDF nous fournit un signal à 50 Hz, si on observe l'évolution de la tension en fonction du temps nous observerions le signal suivant

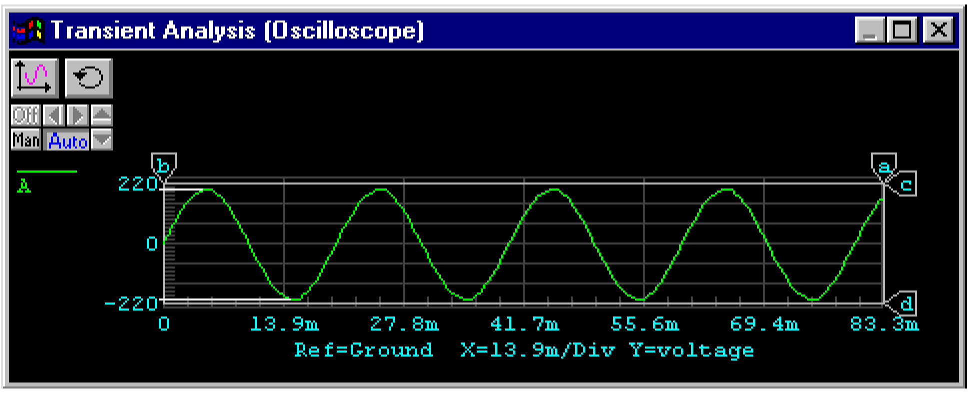
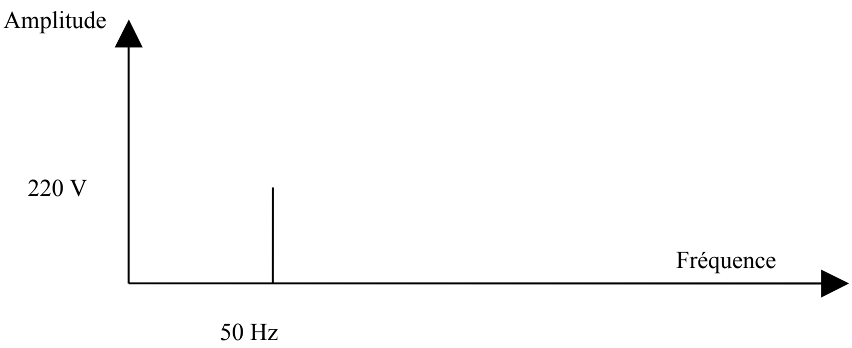


Figure 7 : Représentation à l'oscilloscope de la tension secteur

Il s'agit d'un signal à 50 Hz, c'est-à-dire un signal dont la seule amplitude non nulle est à 50 Hz. Si on représente dans le domaine fréquentiel (mesure sous l'analyseur de spectre), nous observerions le signal suivant :



Sur la figure suivante, nous observerons la trace temporelle et fréquence d'un signal composée de trois sinusoïdes :

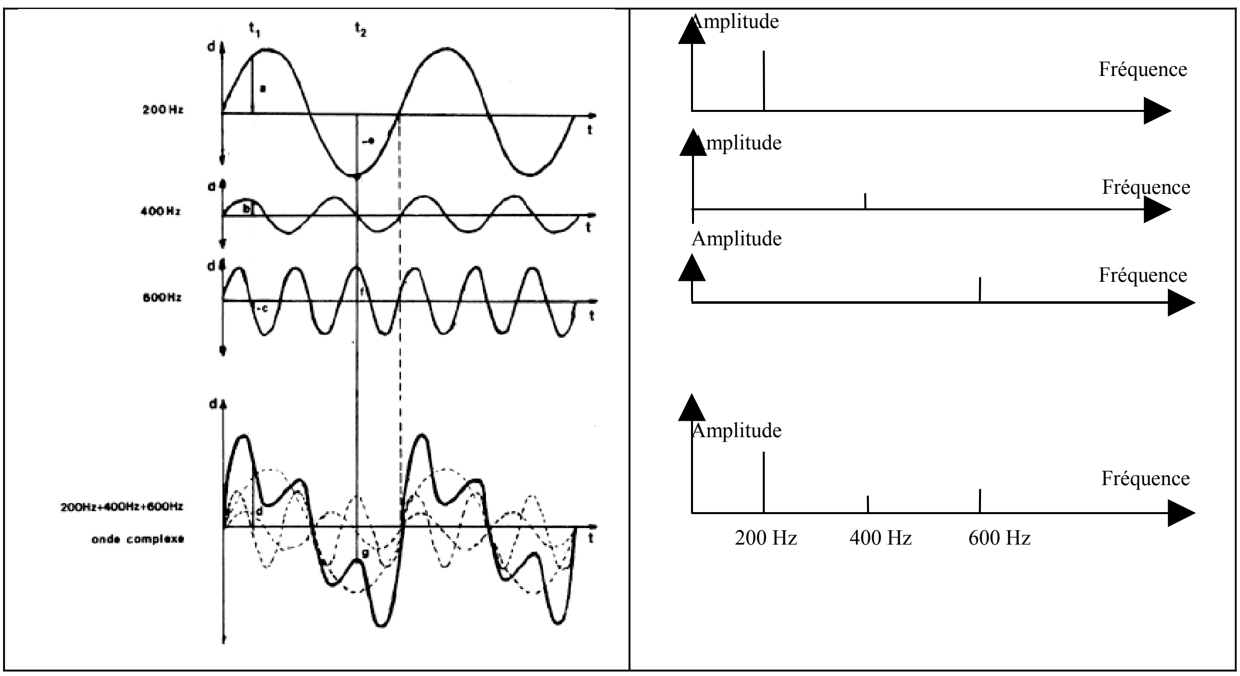


Figure 8 : Représentation temporelle et spectrale d'un signal composé de trois fréquences

Dans le cas précédent, le signal à 200 Hz est appelée la fondamentale, les fréquences à 400 Hz et 600 Hz sont les harmoniques. La fréquence des harmoniques est toujours une multiple de la fréquence du fondamentale.

Ainsi, l'analyseur de spectre représente l'amplitude et chaque fréquence existante dans le signal à mesurer. Le signal étudié est donc constitué d'une somme de signaux sinusoïdaux dont l'amplitude et les fréquences sont déterminées par l'analyseur de spectre.

La représentation spectrale et temporelle donne les mêmes informations. La représentation spectrale représente un signal en fonction de la fréquence (analyseur de spectre) alors que la représentation temporelle représente le même signal en fonction du temps (oscilloscope). La représentation spectrale donne l'amplitude de toutes les fréquences présentes dans le signal temporel, on peut ainsi écrire **le signal temporel comme une sommation de signaux sinusoïdaux**.

Application de cours : TD n°1

Chapitre 2 :
Traitement du signal : Classification des signaux

Informations générales

3h00 de cours
1h30 de TD

Descriptions du chapitre

Classification des signaux : déterministes (périodique ou non) ou aléatoires (stationnaire ou non)
Rappels de signaux périodiques et propriétés
Définitions et propriétés de signaux usuels : porte, rampe, échelon, impulsion.
Puissance et énergie d'un signal

I. Introduction

Les premières applications du traitement du signal étaient dédiées à l'extraction d'un signal dans un milieu bruité. Pour ce faire, il était nécessaire d'avoir des connaissances a priori sur le signal à mesurer et sur la nature du bruit.

On définit deux classes principales de signaux :

- Signal déterministe : il s'agit d'un signal dont on peut représenter l'évolution grâce à une fonction mathématique. On peut citer le signal sinusoïdal, rampe, échelon, impulsion ou dirac, … Un signal déterministe peut être périodique ou non périodique.
- Signal aléatoire est un signal dont on ne peut deviner l'évolution. Néanmoins, tout signal aléatoire peut être caractérisé mathématiquement, mais aucune fonction mathématique ne permet de prédire l'évolution du signal à l'instant donné. Un signal aléatoire peut être stationnaire ou non stationnaire.

En règle générale tout signal réel est aléatoire, car tout signal est entaché de bruit. Mais, attention : un signal aléatoire n'est pas un bruit et un bruit peut être déterministe. En effet, si vous souhaitez transmettre des données par le CPL, alors le bruit le plus élevé est généré par le secteur 50 Hz (donc un signal déterministe) et l'information que vous transmettez est forcément aléatoire (sinon vous pourriez la générer au récepteur par la fonction mathématique).

Cette nuance est importante, on simplifie trop souvent signal aléatoire et bruit.

II. Signaux déterministe

II.1 Exemples de signaux déterministes

Rappel : un signal temporel est déterministe s'il est défini par une équation mathématique. Ainsi, la connaissance de cette fonction permet de prédire la valeur du signal à tout moment : il s'agit d'un signal certain, prévisible.

Parmi les signaux déterministes les plus connus, on peut citer les signaux périodiques tels que :

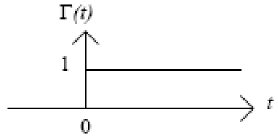
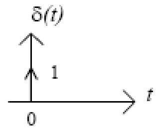
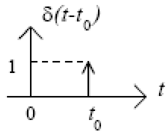
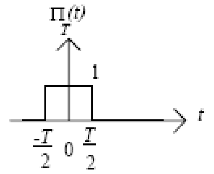
- le sinus à la fréquence fp : $V\sin(2\pi fpt)$ de période $Tp=1/fp$.
- le triangle : $tri(t) = V_0 - V|t-t_0|$ périodisé tous les Tp
- le carré : $rect(t)= V_M$ sur une demi période Tp et Vm sur l'autre demi période

Définition :
Un signal déterministe, représenté par sa fonction f est dit périodique de période T_p si $f(t)=f(t+T_p)$.

Propriété :
Tout signal périodique de période T_p présente une fréquence fondamentale à la fréquence $f_p=1/T_p$.

Tout signal déterministe n'est pas obligatoirement périodique, on peut citer à titre d'exemple :

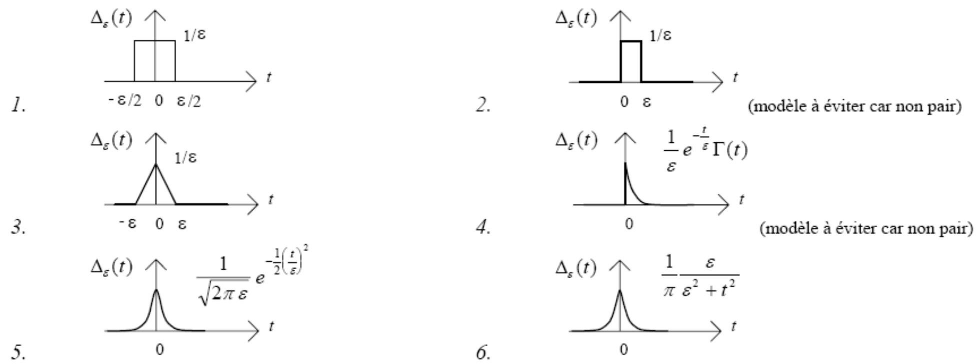
- Impulsion de dirac, notée δ
- Echelon ou fonction de Heavyside Γ
- Fenêtre ou porte

Echelon ou indice unité *(fonction de Heavyside)* noté Γ ou *u* ou Φ ou encore *Y* ou même 1 *Ce signal permet de simuler un brusque changement de régime de fonctionnement (mise en route, ...)*	$\Gamma(t) = 1$ si $t > 0$ $= 0$ si $t < 0$ (non défini pour $t = 0$) 	**Impulsion de Dirac ou percussion** noté δ (à TD, on l'appelle souvent symbole de Kronecker) *Ce signal simule une brève perturbation (parasite, ...)* *(et aussi une « claque » pour un système)*	$\delta(t) = \infty$ si $t = 0$ $\delta(t) = 0$ sinon $\delta(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T} \Pi_T(t)$ d'où la propriété: $\forall\ \varepsilon \neq 0 : \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\,dt = 1$  (1 représente l'aire (le poids) de δ(t) et non pas l'ordonnée)  (*ex* : $t_0 > 0$) $\forall\ \varepsilon \neq 0 : \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0)\,dt = 1$ $\delta(t) = \frac{d\Gamma(t)}{dt}$ $\Gamma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$ δ(t) est paire
Fenêtre ou porte ou impulsion noté Π_T de largeur *T*	$\Pi_T(t) = 1$ si $-T/2 < t < T/2$ $= 0$ sinon 		

Rmq : On peut écrire : $\Pi_T(t)=\Gamma(t-T/2)-\Gamma(t+T/2)$

Facultatif : L'impulsion de Dirac est un signal particulier et on va l'étudier dans un premier temps comme la limite d'une fonction $\Delta_\varepsilon(t)$ en 0.

$\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Delta_\varepsilon(t)$ avec par exemple, les fonctions possibles $\Delta_\varepsilon(t)$ suivantes :



L'impulsion de dirac est définie comme la limite d'une des fonctions ci-dessus lorsque le paramètre ε tend vers 0.

Donc : $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Delta_\varepsilon(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

Rmq : L'étude de l'impulsion de Dirac est issue de la théorie des distributions, que nous n'étudierons pas (il serait plus rigoureux de dire que δ n'existe qu'au sens des distributions et n'est pas une fonction puisque cet élément est infini en 0 et nul ailleurs).

Fin de la partie Facultative

Par convention on représente $\delta(t-t_1)$ par une flèche d'unité 1 (correspondant à l'aire du dirac, comme représenté sur le tableau des fonctions).

On se réfèrera à l'Annexe A pour une description plus exhaustives de fonctions.

II-2 Moyenne et puissance d'un signal déterministe **périodique**

Par définition, un signal déterministe est un signal connu, c'est-à-dire dont on connaît la fonction. Soit u, la fonction du signal déterministe (ex : $u(t) = 1+ \sin(2\pi f_0 t)$).

On définit :

La **Moyenne** : par l'intégrale de la fonction sur une période (d'où la nécessité d'un signal périodique).

$$m = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

La **puissance** P ou **valeur efficace** $\mathbf{S_{eff}}$: par l'intégrale de la fonction au carré

$$S_{eff}^2 = P = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt$$

II-3 Cas général : Puissance et Energie d'un signal déterministe **non nécessairement périodique**

Soit un signal quelconque U traversant une résistance R. En appliquant la loi d'Ohm, on mesure le courant par $i=U/R$.

La puissance est exprimée en Watt correspond à l'Energie fournie (Joule) à la résistance sur une durée d'une seconde (1 Watt = 1 Joule/seconde).

Rmq : 1 Watt heure = 1 watt pendant une heure = 3600 joules.

L'énergie instantanée est le produit du courant et de la tension, soit $E(t)=u(t).i(t)$. Dans le cas de la résistance, l'énergie **INSTANTANEE** $E(t) = u^2(t)/R$.

En traitement du signal, quand aucune information n'est donnée sur R, on normalise la résistance à 1 Ohm, donc l'énergie instantanée s'écrit $E(t)=u^2(t)$. En général, on calcule l'Energie sur un laps de temps $\Delta T=t_2-t_1$ par :

Energie:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} u^2(t)dt$$

Puissance moyenne :

$$P = \frac{1}{\Delta T}\int_{t_1}^{t_2} u^2(t)dt$$

Energie totale :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt$$

Puissance moyenne totale :

$$P = \lim_{T->\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)dt$$

Rmq : Dans le cas d'un signal périodique, on retrouve $P = \lim_{T->\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)dt = P = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} u^2(t)dt$

III. <u>Signaux aléatoires</u>

<u>III-1 Exemples et définitions</u>

Rappel : un signal est dit aléatoire si la connaissance du signal à l'instant t ne permet pas de préjuger de la valeur à l'instant t+Δt. Bien qu'aléatoire, le signal est modélisé par ses caractéristiques statistiques.

Un signal aléatoire peut être stationnaire ou non stationnaire. Il est stationnaire si ses caractéristiques aléatoires ne sont pas modifiés au cours du temps.

Nous allons illustrer cela par des exemples concrets.

1er exemple : Lancer de dé

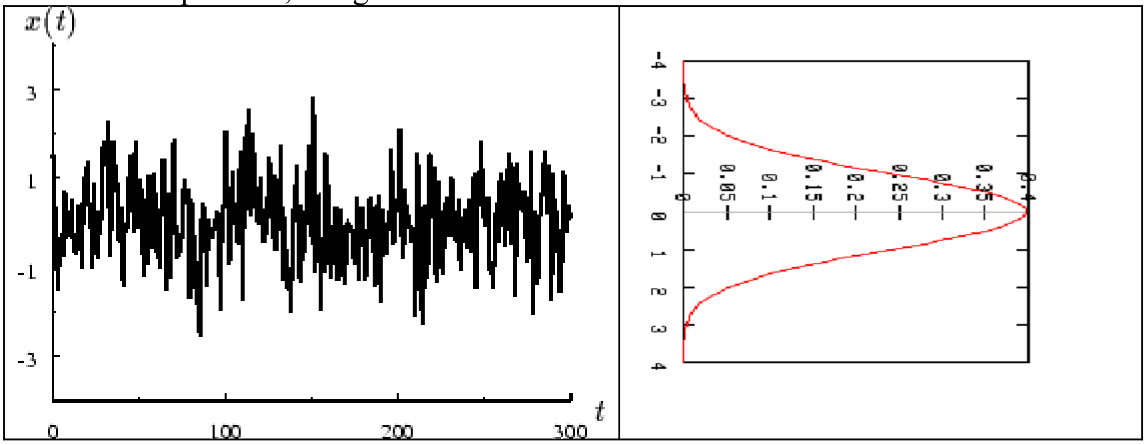
Lorsqu'on lance un dé 6 faces, on a 1/6 d'obtenir un '6'. La probabilité est de 1/6 pour chaque expérience (on parle de probabilité uniforme p). Soit m, les différentes valeurs du dé (m prend pour valeur {1, 2, 3, 4, 5, 6}). Si on calcule la moyenne des lancés obtenus, on va sommer chaque valeur de dé, et diviser le tout par le nombre de lancer. En moyenne, on obtient :

$$m = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} m_k . p_k$$

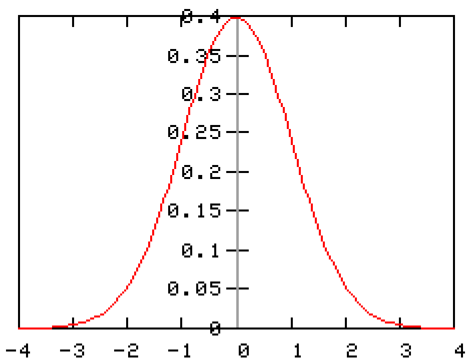
ou ∑ signifie somme, N est le nombre de lancer, m_k est le résultat et p_k=1/6 la probabilité.

2ème exemple : Bruit de mesure (Bruit gaussien).

Lors de l'acquisition, le signal est affecté d'un bruit de mesure :



On s'aperçoit que le signal passe plus souvent par 0 que par 2.7 volt. Si on trace le nombre de fois que le signal passe par une amplitude donnée (comme si on projetait le signal sur l'axe vertical), on obtient l'histogramme (la fonction de densité) du signal.



Densité de fonction

La courbe densité de fonction représente en ordonnée la probabilité d'avoir un bruit (dans cet exemple, on a choisi d'illustrer par un bruit de mesure) dont l'amplitude est donnée en ordonnée. On s'aperçoit qu'il y a très peu de chance d'avoir un bruit d'amplitude 4 V.

On constate aussi que le signal est autant positif que négatif, donc que la valeur moyenne est nulle. Le signal présenté ci-dessus est appelé bruit blanc, il s'agit d'un signal gaussien (cf cours de mathématique).

III-2 Propriétés

Soit un signal aléatoire, définit par sa fonction de probabilité p(x) et des valeurs x que peut prendre ce signal.

Dans l'exemple de bruit, x représente l'amplitude du bruit et p(x) la probabilité associée (l'ordonnée).

On définit **la moyenne ou l'espérance mathématique** par

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

On définit **la variance par** :

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p(x)dx$$

m étant la moyenne, on mesure l'écart au carré de la variation du signal par rapport à la moyenne. Il s'agit donc du carré de l'écart type.

Application : Correction des copies, on calcule la moyenne de la classe et l'écart type c'est-à-dire à la différence moyenne des notes des élèves par rapport à la moyenne de la classe.

Dans le cas d'un bruit de mesure, la variance est égale à la puissance du signal.

ATTENTION : Nous supposons des conditions bien particulières pour lesquelles on peut admettre que la variance d'un signal aléatoire est égale à la puissance. Ceci est loin d'être vrai et évident pour tout types de signaux aléatoires.

IV. Unités de puissance

Que le signal soit déterministe ou aléatoire, nous avons défini le terme de Puissance. La puissance calculée consiste, dans les deux cas à mesurer l'amplitude au carrée du signal. La puissance s'exprime en Watt, il s'agit d'une tension au carré sur une résistance de 1 Ohm.

Pour des raisons de simplicité de calcul, on introduit des notions de dB_W.

1 dB_W = 10 * log10(1 Watt)

La règle de conversion est la suivante : $P_{dB,W} = 10 * \log_{10}(P_W)$, où $P_{dB,W}$ représente la puissance en dB_W et P_W la puissance en Watt, $\log_{10}$ est le logarithme en base 10.

Cette règle de conversion est très simple et sera utilisée pour faciliter les calculs mais, avant chaque calcul faites bien attentions aux valeurs utilisées (Volt, Watt, dB, …).

ATTENTION :
La notation dB_w n'existe pas, on parle de dB, en faisant référence à des Watts lorsqu'on parle de puissances. Néanmoins, le terme de dB est sans unité (ni Watt, ni Volt, il s'agit plutôt d'un gain). Le dB est utilisé pour spécifier un rapport de Puissance ou de tension (donc pas d'unité). Quand on parle d'un gain en puissance de 3dB cela signifie que la puissance est multipliée par 2 (sans unité). Donc si le signal d'entrée à une puissance de 3 dB (ce qui représente 2 Watts), et que l'on amplifie le signal par un gain de 3 dB (on l'amplifie par un rapport de 2 sans unité), le signal en sortie de l'amplificateur a une puissance de 6 dB (soit 4 Watts).

Exemple d'application.

On suppose une ligne téléphonique qui atténue le signal de moitié tous les kms. Le signal émis par le centrale téléphonique est de 1 Watt, quelle est la puissance reçue au bout de 8 kms ?

Réponse : Au bout d'un kilomètre, on mesure ½ Watt, au bout de 2 kms, on mesure ¼ watt, donc au bout de 8 kms on mesure $1/2^8$. *Si on raisonne en dB, on perd* $10*\log_{10}(0.5)$ *soit 3dB par kilomètre (on gagne -3 dB ou on perd 3 dB). Par conséquent, l'atténuation au bout de 8 kms est de 24 dB. Le centrale émettait 1 Watt soit 0 dB* ($10*\log_{10}(1)$) *par conséquent, on mesure -24dB au bout de 8 km.*

On sait aussi que la puissance P est proportionnelle à la tension au carré (résistance normalisée).

Donc, $P_{dB} = 10*\log_{10}(P_W) = 10*\log_{10}(V_{Volt}^2) = 20*\log_{10}(V)$. Attention à ne pas confondre

Passage de dB en dBm.

Dans le cadre des télécoms, l'amplitude des signaux est très faible. On introduit alors l'unité dBm pour se référer à des tensions en mV, et des puissances en mW

$P_{dBm} = 10*\log_{10}(P_{mW})$. Les dBm font références à des mW.

Exercice d'application : Démontrer que $P_{dB}=P_{dBm}- 30$ dB

Application. Soit un signal de puissance 5 dBm, on l'amplifie par un rapport de 3 dB (notez encore le terme dB sans unité et non dBm), on récupère un signal de 5dBm+3 dB = 8 dBm.

V. Pour résumer, une classification des signaux

Les signaux physiques ont une existence réelle, et la mesure d'un signal physique peut se représenter par une fonction s(t) qui varie au cours du temps.

Ce signal qui a une existence propre possède les caractéristiques suivantes :

- Energie bornée
- Amplitude bornée
- Continu temporellement
- Causal s(t)=0 si t<0 (le signal n'existe que pour les t>0)
- Spectre borné

En théorie, pour simplifier les calculs on introduit des signaux qui ont l'une ou plusieurs caractéristiques suivantes :

- Energie infinie
- Discontinuité
- Non causal
- Spectre infini
- Valeurs complexes

Nous verrons au chapitre 2 l'introduction de signaux qui n'existent pas physiquement (ex : Dirac) et le spectre de signaux complexes prenant en compte les fréquences négatives.

On peut ainsi définir différents modes de classification :
- représentation temporelle des signaux
- caractéristique énergétique
- représentation spectrale
- continu ou discret

V.1) Représentation temporelle des signaux :

Signaux déterministes ou certains : Défini par un modèle mathématique
- périodique (réels ou complexes)
- non périodique (pseudo périodique, transitoire, chaotique)

Signaux aléatoires : évolution imprévisible mais description mathématique connu

- Signaux stationnaires (signaux ergodiques ou non ergodiques) lorsque la valeur moyenne est indépendant du temps. Ils sont dit ergodiques s'il est identique de faire une moyenne statistique à un instant donnée sur plusieurs échantillons ou une moyenne temporelle suffisamment longue sur un seul de ces essais.

- Signaux non stationnaires

V.2) classification énergétique

La puissance électrique instantanée fournie à une résistance R est définie par p(t)=u(t).i(t).

L'Energie dissipée sur un intervalle $[t_1,t_2]$ avec $t_1<t_2$ s'écrit :

$$E = \int_{t_1}^{t_2} u^2(t)dt$$

Par conséquent la puissance moyenne $P(t_1,t_2)$ mesurée en Watt s'exprime sous la forme.

$$P = \frac{1}{t_1 - t_2}\int_{t_1}^{t_2} u^2(t)dt$$

Par extension, on appelle Energie E et puissance moyenne Ps d'un signal s(t) calculé sur un intervalle $[t_1,t_2]$ les valeurs (dites quadratiques) suivantes :

$$E(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t)dt \text{ et } Ps(t_1,t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s^2(t)dt$$

Si on suppose $t_1=-\infty$ et $t_2=\infty$, on obtient :

$$Ws = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt \text{ et } Ps = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt$$

Si le signal est représenté par une variable complexe, les définitions sont équivalentes en remplacant $s^2(t)$ par $s(t).s^*(t)=|s(t)|^2$ ou $s^*(t)$ est le complexe conjugué de s(t). Par exemple

s(t)= tan (3t)+i. cos(2t).
s*(t)= tan (3t)-i. cos(2t)

<u>Les signaux à énergie finie :</u>

$$Ws = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt < \infty$$

<u>Les signaux à puissance moyenne finie :</u>

$$Ps = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt < \infty$$

RMQ :

1) Un signal à puissance moyenne finie non nulle a une énergie totale infinie

2) un signal à énergie totale finie a une puissance moyenne nulle.

V.3) Classification spectrale

Un signal peut être classé suivant la distribution de son énergie ou de sa puissance en fonction de la fréquence. Le domaine de fréquence occupé par son spectre ΔF s’appelle la bande occupée ou largeur de bande du signal.

$\Delta F=F_{max}-F_{min}$ (Hz)

Il est préférable de comparer la largeur de la bande par rapport à la fréquence moyenne de la bande : $Fmoy= (F_{max}+F_{min})/2$

On défini :

Les signaux à bande étroite pour lesquels ΔF/Fmoy <<1
Les signaux à bande large pour lesquels ΔF/Fmoy >1

Pour les signaux à bande étroite, si de plus :

- Fmoy<250 kHz : Signaux basses fréquences (BF)
- 250 kHz < Fmoy<30 MHz : Signaux Hautes Fréquences (HF)
- 30 MHz < Fmoy<300 MHz : Signaux Très Hautes Fréquences (THF)
- 300 MHz < Fmoy<3 GHz : Signaux Ultra Hautes Fréquences (UHF)
- Fmoy> 3 GHz : Signaux Super Hautes fréquences (SHF)

Lorsque la fréquence du signal devient très grande (> Thz = 10^{12} Hz) la longueur d'onde est le paramètre de référence (il est à noter que les choix de 3GHz = 0,1 mm et 300, 30 MHz représente une longueur d'onde de 1mm et 10 mm).

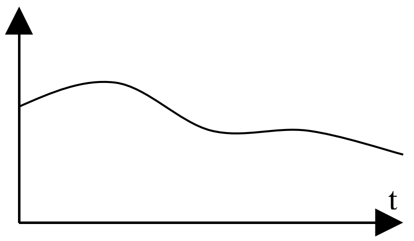
- 700 nm <λ < 0,1 mm : Signal lumineux infrarouge
- 400 nm <λ < 700 nm : Signal lumineux visible
- 10 nm <λ < 400 nm : Signal lumineux ultraviolet

V.4) Signaux continu ou discret

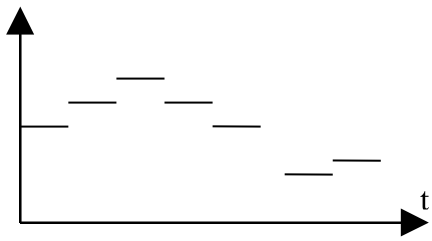
Un signal continu représente un signal analogique, c'est-à-dire qui varie continûment avec le temps (signaux à temps continu). Le temps est donc un paramètre important de comparaison, car, un signal numérisé ou échantillonné est un signal à temps discret. Mais on peut aussi comparer l'amplitude du signal selon que l'amplitude est continue dans le temps (un signal continu dans le temps est un signal dont on peut tracer la fonction sans lever le crayon, il ne s'agit pas d'un signal continu c'est-à-dire d'amplitude constante) ou discrétisé.

On peut ainsi catégoriser quatre formes de signaux :

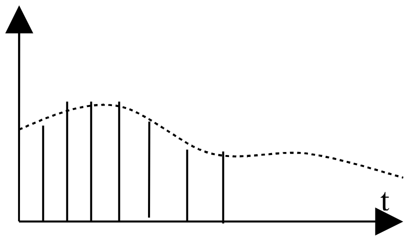
- Signal à amplitude et temps continus (signal analogique) : s(t).
- Signal à amplitude discrète et temps continu (signal quantifié) : $s_q(t)$. On retrouvera ce signal en TD et en TP à la sortie d'un convertisseur analogique numérique.
- Signal a amplitude constant et temps discret (signal échantillonné) : s(nTe). Ce signal est obtenu à l'aide d'un échantillonneur bloqueur et est utilisé par un circuit conversion analogique/Numérique.
- Signal a amplitude discret et temps discret $s_q(nTe)$



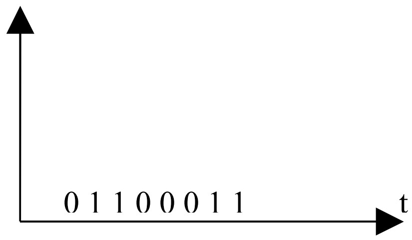
Signal continu dans le temps



Signal discretisé



Signal échantillonné



Signal Numérique

Dans ce module, nous avons décrit différents types de signaux – déterministes – et – aléatoires -, les premiers sont connus par l'utilisateurs, les seconds sont dus aux bruits ou sont destinés à modéliser des systèmes. Ces signaux sont couramment utilisés en traitement du signal, on les associe à leur puissance, et aux propriétés de corrélations. Nous allons couramment mesurer leur spectre, et l'évolution de leur spectre. Le chapitre suivant est destiné à l'étude des séries et des Transformée de Fourier.

Application de cours :

- TD n°2
- Annexe A : Ecrire les formules mathématiques de chaque signal

Chapitre 3 :
Traitement du signal : Analyse Spectrale et Série de Fourier

Informations générales

3h00 de cours
3h00 de TD

Descriptions du chapitre

Calcul des séries et Transformée de Fourier
Spectre de signaux usuels : porte, rampe, échelon, impulsion.

I. Introduction aux séries de Fourier

I.1) Définition de la série de Fourier

Les séries de Fourier permettent de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel pour des signaux **périodiques**, dans le cas contraire, on utilisera la Transformée de Fourier.

Nous avons vu qu'un analyseur de spectre permettait de représenter un signal comme sommation de signaux à des fréquences différentes. En fait, la décomposition en série de Fourier permet de représenter un signal comme une somme infinie de signaux sinusoidaux et co-sinusoidaux.

Soit t->x(t) un signal périodique de période T, quelconque alors x peut s'écrire de la manière suivante :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_p t) + b_n \sin(n\omega_p t) \qquad \text{(eq 3.1)}$$

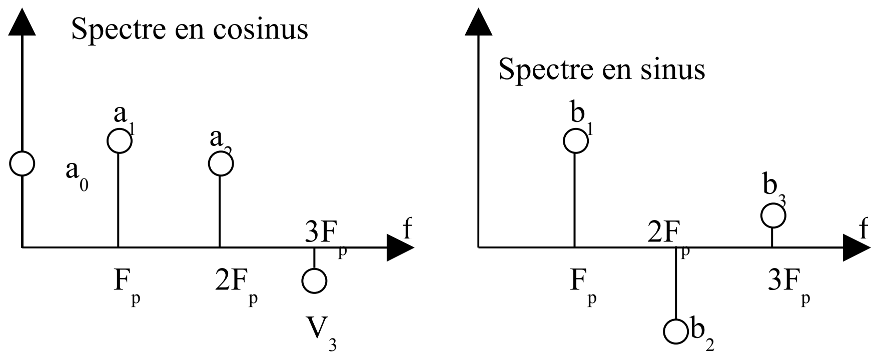
avec :

$$a_o = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$$, est la composante continue

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\omega_p t)dt,\ b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(n\omega_p t)dt,\ n>1 \qquad \text{(eq 3.2)}$$

Les coefficients a_n et b_n sont appelés les coefficients de la série de Fourier, $\omega_p = 2\pi f_p$ est la pulsation avec f_p=1/T. Remarquez les indices relatifs à la période.

On peut représenter l'équation 3.1 par deux spectres, l'un représentant le spectre en cosinus et l'autre le spectre en sinus :



où les coefficients a_n et b_n sont positifs ou négatifs.

On peut noter : $V_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, V_n est l'amplitude observée par l'Analyseur de spectre à la fréquence nf_p, $f_p=1/T_p$ la fréquence fondamentale. Par définition Vn est positif, mais a_n et ou b_n peuvent être négatifs.

<u>Propriétés :</u>

a_0 représente la tension moyenne, à la fréquence 0*fp donc il est représenté par l'amplitude de la raie observée à la fréquence 0 de l'analyseur de spectre. La tension moyenne est aussi appelée la composante Continue.

Notez bien que « Tout signal ayant une composante continue non nulle en temporel présentera une raie à la fréquence 0 d'amplitude égale à la composante continue. »

V_1 représente l'amplitude de la fondamentale, les amplitudes V_n, n>1 représentent l'amplitude des harmoniques.

V_n pour n≥1 représente l'amplitude de la fondamentale et des harmoniques

En factorisant par $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, on peut écrire (3.1) selon :

$$x(t) = a_0 + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(2\pi F_p nt) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(2\pi F_p nt)\right)$$

Or en posant $x_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ et $y_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$, on note que $x_n^2+y_n^2=1$.

Et sachant que $\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$, on peut écrire $x_n = \cos(\phi_n)$ et $y_n = \sin(\phi_n)$

Par conséquent substituant x_n et y_n dans la formule précédente par cette dernière relation, on peut écrire :

$$x(t) = a_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left[\cos(\theta_n)\cos(2\pi nF_p t) + \sin(\theta_n)\sin(2\pi nF_p t)\right]\right)$$ ce qui peut encore s'écrire sous la forme suivante :

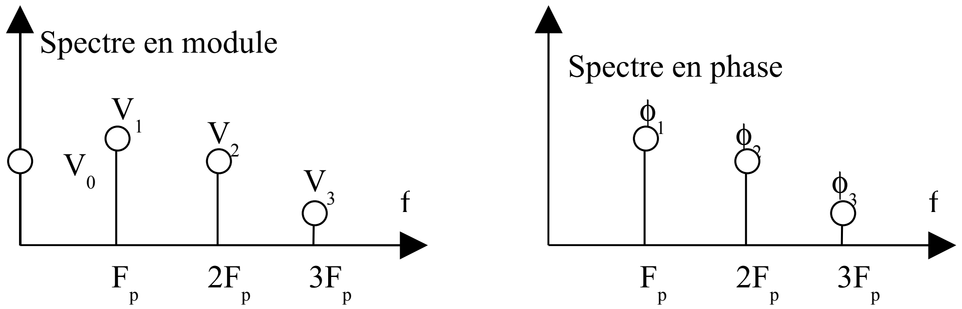
$$x(t) = a_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(2\pi F_p nt - \phi)\right) \qquad (3.3)$$

avec $\frac{y}{x} = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \tan(\phi)$ soit $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \phi$ c'est-à-dire, puisque $x_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ et $y_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$, $\frac{y_n}{x_n} = \frac{b_n}{a_n}$

Donc pour résumer :

a_0 est la tension moyenne et $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ est l'amplitude des raies données par l'analyseur de spectre. On note que l'analyseur de spectre ne donne aucune **information relative à la phase**, il ne mesure que l'amplitude des raies.

Le spectre d'un signal périodique est constitué de raies dont l'écart est égal à Fp. **Le spectre** d'un signal périodique est discontinu.



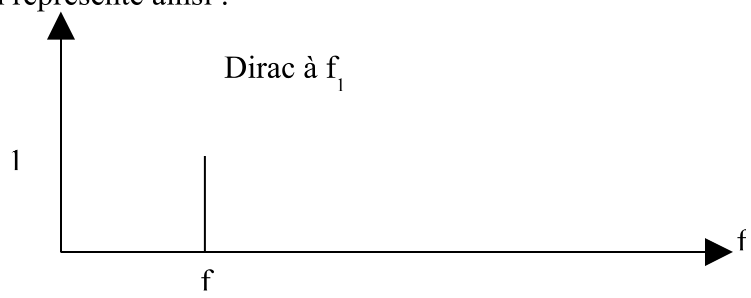
La encore, le spectre est représentée par deux figures, une pour le module et une pour la phase (auparavant, nous avions un spectre en sinus et en cosinus).

Important : L'analyseur de spectre ne trace que le spectre en module.

Rappel de la fonction de Dirac

Nous avons vu dans le chapitre 2 quelques fonctions particulières, non périodique telle que la fonction de dirac, définie en temporel par $\delta(t-t_1)$ et représentée par une flèche d'unité 1 (correspondant à l'aire du dirac, comme représenté sur le tableau des fonctions).
La fonction de dirac peut être définie en fréquentiel par $\delta(f-f_1)$, par une raie à la fréquence f_1 et d'amplitude 1. En fait, $\delta(f)$ est la fonction de Dirac définie par une amplitude de 1 à 0Hz et une amplitude nulle ailleurs donc $\delta(f-f_1)$ est représenté par une amplitude de 1 à $f-f_1=0$ Hz et nulle ailleurs

On représente ainsi :



La série de Fourier est constituée de plusieurs raies, donc on peut considérer qu'elle est constituée d'un dirac d'amplitude V_0 à 0, d'un dirac d'amplitude V_1 à F_p, d'un dirac d'amplitude V_2 à $2F_p$, …

Mathématiquement, le module du **spectre** s'écrit :

$$X(f) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \delta(f - nF_p) \qquad (3.4)$$

Prenez bien conscience qu'en temporel le signal s'écrit :

$$x(t) = V_0 + V_n\left(\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi nF_p t + \theta_n)\right)$$

I.2) Calcul de la Série de Fourier.

En règle générale, nous allons utiliser le tableau à l'annexe C pour déterminer les coefficients de la série de Fourier pour des signaux périodiques. Néanmoins retenez que les coefficients sont déterminés à partir des équations d'intégrations précédentes, formules que vous étudierez en mathématique. Nous allons maintenant nous intéresser à la représentation spectrale **UNIlatérale** et **Bilatérale**. Pour cela, nous allons introduire la notion de signaux complexes.

I.2.1) Représentation Spectrale Unilatérale.

La décomposition en série de Fourier permet de représenter le signal sous l'une des deux formes équivalente suivante :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nF_p t) + b_n \sin(2\pi nF_p t)$$

ou

$$x(t) = V_0 + V_n\left(\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi nF_p t + \theta_n)\right)$$

Dans le premier cas, on peut donc représenter le spectre en cosinus et en sinus, dans le deuxième cas on peut représenter le spectre en amplitude et en phase, dans le domaine des fréquences positives.
Comme le spectre n'est représenté que pour les fréquences positives, on parle de représentation spectrale **UNIlatérale**.

I.2.2) Représentation Spectrale Bilatérale.

Passage en complexe

En appliquant les formules d'Euler, on peut écrire :

$\cos\beta = \dfrac{e^{j\beta} + e^{-j\beta}}{2}$ et $\sin\beta = \dfrac{e^{j\beta} - e^{-j\beta}}{2j}$, j représente l'imaginaire pur (j²=-1)

(note : en mathématique, on emploiera plus souvent i à la place de j)

En remplaçant les cosinus et les sinus par l'expression précédente, on peut écrire l'équation 2. 1 de la manière suivante :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\exp(2\pi F_p nt) + j.\exp(-2\pi F_p nt)}{2} + b_n \frac{\exp(2\pi F_p nt) - j.\exp(-2\pi F_p nt)}{2j}$$

avec $j^2=-1$ donc $1/j=-j$

En regroupant les termes pour n positif et n négatif, on trouve

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right)\exp(2\pi F_p nt) + \left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right)\exp(-2\pi F_p nt)\right]$$

On pose
$c_n = \left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right)\ et\ c_{-n} = \left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right) pour\, n > 0$, c_{-n} est donc défini pour les indices négatifs.

on obtient alors : $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n \exp(2\pi F_p nt)\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{-n} \exp(-2\pi F_p nt)\right]$

On remarquera que les coefficients c_n sont déterminés de –oo à + oo

Les coefficients c_n peuvent être calculés de la manière suivante :

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad \text{pour } n>0$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad \text{pour } n>0,$$

c_{-n} est donc d'indice n négatif

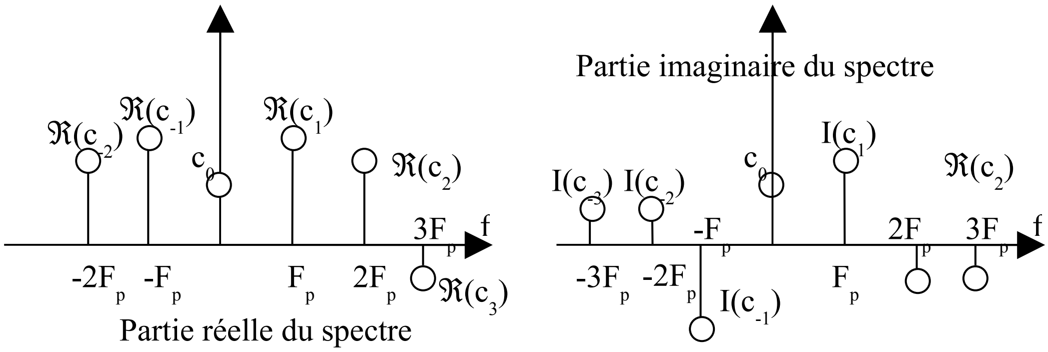
$$c_0=a_0 \tag{3.5}$$

ce qui suppose de calculer a_n et b_n en amont.

On préférera la formulation suivante :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{jn2\pi F_p t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{jn\omega_p t}\,dt \tag{3.6}$$

Représenter le spectre du signal x(t) consiste à représenter le signal complexe c_n pour les différentes fréquences. Là encore, on tracera deux figures, l'une pour la partie réelle et l'autre pour la partie imaginaire (cf. représentation spectrale selon le cosinus et le sinus ou la représentation spectre en module et en phase).



On notera que $\Re(c_n)= \Re(c_{-n})$ et $I(c_n)= -I(c_{-n})$.

<u>Exemple d'application</u> :

Soit x(t)= A sur [0,1/2] et -A sur [-1/2, 0], le signal 1-périodique (périodique de période 1). Alors

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_1 t}dt = \int_{-1/2}^{1/2} x(t)e^{-jn\omega_1 t}dt = \int_{-1/2}^{0} x(t)e^{-jn\omega_1 t}dt + \int_{0}^{1/2} x(t)e^{-jn\omega_1 t}dt = \int_{-1/2}^{0} -Ae^{-jn\omega_1 t}dt + \int_{0}^{1/2} Ae^{-jn\omega_1 t}dt$$

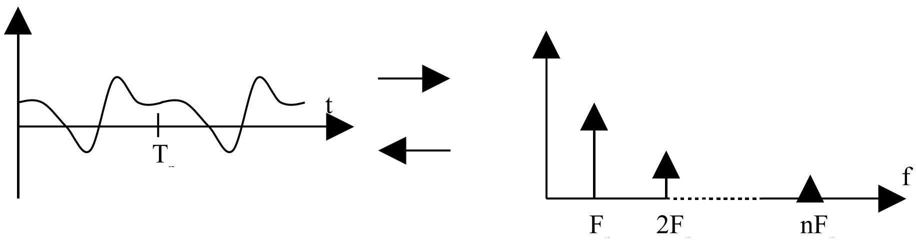
En remplaçant t par –u (t et un étant des variables muettes), on obtient :

$$c_n = \int_{0}^{1/2} -Ae^{-jn\omega_1(-u)}(-du) + \int_{0}^{1/2} Ae^{-jn\omega_1 t}dt = \int_{0}^{1/2} Ae^{jn\omega_1 t} + Ae^{-jn\omega_1 t}dt = 2A\int_{0}^{1/2} \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2}dt = 2A\int_{0}^{1/2} \cos(n2\pi t)dt$$

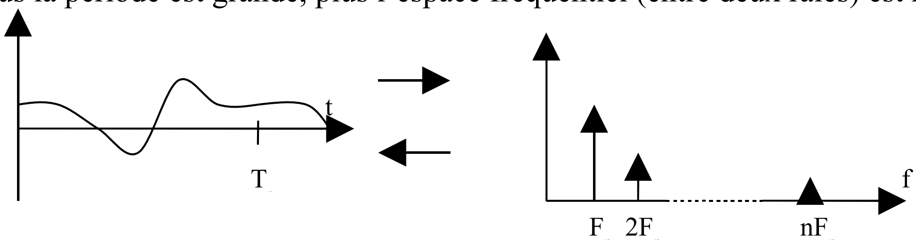
Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale.

II. <u>Extension de la série de Fourier aux Transformée de Fourier</u>

Tout signal CONTINUE et PERIODIQUE de période T_p présente un spectre DISCRET dont les raies sont espacées par des multiples de f_p.

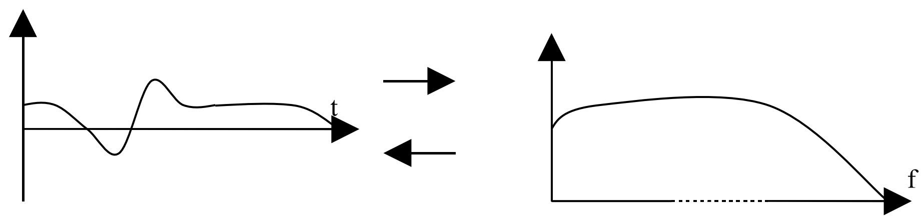


Plus la période est grande, plus l'espace fréquentiel (entre deux raies) est réduit.



Lorsque le signal n'est pas périodique, on peut supposer qu'il est périodique à l'infini, dans ce cas la période Tp est infinie et donc Fp=0.

Si le signal n'est pas périodique (ou périodique à l'infini), le spectre est CONTINU



La Transformée de Fourier s'obtient de manière équivalente à la série de Fourier, mais en faisant tendre la période T vers l'infini. La sommation devient une intégrale. Ainsi on obtient :

$$X(f) = \lim_{T \to \infty} Tc_n = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \qquad (3.7)$$

A partir de x(t) on peut calculer le spectre du signal par Transformée de Fourier.

Par conséquent, on peut écrire :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Mais, on peut aussi passer du domaine fréquentiel au domaine temporel : A partir de la Transformée de Fourier X(f), on peut calculer le signal x(t) :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{+j2\pi ft} df \qquad (3.8)$$

Il s'agit de la **transformée de Fourier Inverse**.

Notez bien le signe + devant le complexe par rapport au signe moins dans l'équation de la Transformée de Fourier et la variable que l'on intègre.

Récapitulatif :

Il est important de connaître les équations relatives aux Séries et Transformées de Fourier.

Tout signal $x_p(t)$ périodique de période T_p peut se décomposer en une somme infinie d'exponentiel complexe :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_p t} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_p t} dt$$

c_n sont les coefficients de Fourier, c_0 représente la tension continue (moyenne)

Si le signal x(t) n'est pas périodique, alors on utilise la **Transformée de Fourier** pour calculer le spectre du signal : On peut ainsi obtenir le domaine fréquentiel X(f) à partir de la représentation temporelle x(t).

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

On peut aussi passer du domaine fréquentiel au domaine temporel. En connaissant X(f) on peut en déduire x(t) par la **Transformée de Fourier Inverse** :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{+j2\pi ft} df$$

Application de cours :
Il est important de connaître les formulations et de comprendre les analogies entre les coefficients de la série de Fourier et la moyenne, la fondamentale et les harmoniques

- TD n°3

Chapitre 4 : Traitement du signal : Convolution et Echantillonnage

Informations générales

1h30 de cours
1h30 de TD

Descriptions du chapitre

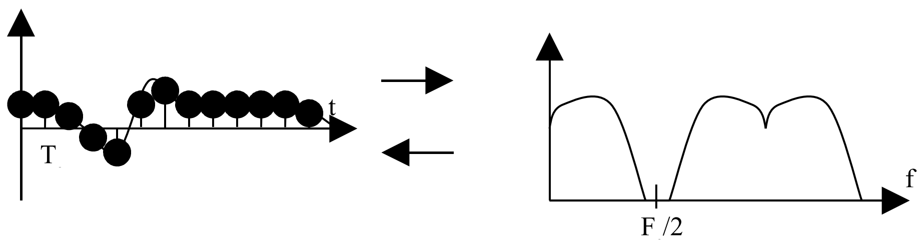
Propriétés des fonctions de Convolution
Peigne de Dirac
Echantillonnage – Condition de Shannon.

I. <u>Introduction</u>

Les technologies actuelles (Téléphone, PDA, PC, chaîne d'acquisition, Ipod, …) utilisent des calculateurs numériques. Lorsque vous travaillez sous Matlab ou Scilab, le signal temporel est discrétisé, ce qui signifie que vous ne prenez pas en compte l'évolution du signal à tout instant (signal analogique), mais l'amplitude du signal à des instants bien réguliers.

Il s'agit de l'échantillonnage.

Echantillonner consiste à prélever PERIODIQUEMENT l'amplitude du signal x(t), comme le montre la figure suivante :

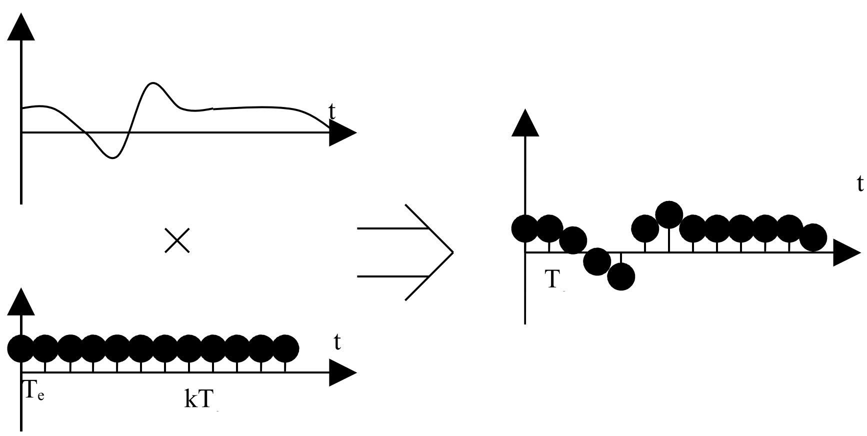


Au cours du chapitre 3, nous avons vu :

- qu'un signal périodique présente un spectre discret,
- qu'un signal non périodique présente un spectre continu

Nous allons voir maintenant qu'un signal non périodique mais échantillonné (ou discrétisé) à la fréquence Fe présente un spectre périodique de « période » Fe (un spectre étant défini en fréquence, sa période est une fréquence).

L'opération d'échantillonnage consiste à prélever l'amplitude du signal à tous les instants Te, tout revient donc à faire le produit du signal à échantillonner avec une série de Dirac :



La série de Dirac s'appelle un **peigne de Dirac.** Cette fonction est constituée de dirac espacés de Te, par conséquent $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)$.

On obtient un signal échantillonné $x_e(t) = x(t).p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_e)$

La question est de savoir, que vaut le spectre $X_e(f)$ de $x_e(t)$?
Le fil conducteur de ce chapitre est la mesure du spectre.

II. Convolution

II-1) Notion de la fonction de convolution

Prenons l'exemple d'une pièce résonnante, (pensez à une église). Toute mélodie jouée dans l'église n'aura pas la même sonorité que la même mélodie jouée en plein air. Les parois de l'église et la forme permettent de « conduire » le son et l'on perçoit les réverbérations.

Pour simplifier, prenons une chambre d'écho qui répète un son à l'instant T_{echo}. Soit s(t) le signal nous entendrons à tout instant s(t) et T_{echo} plus tard, nous ré-entendrons s(t) atténué, soit le signal $s_{recu}(t)=s(t)+As(t-T_{echo})$.

Si j'émets une très brève note (une impulsion ou un dirac), je reçois :

Une brève note représentera une impulsion (un dirac temporel), et nous avons donc tracé sur la figure précédente la réponse du canal. Le signal entendu et l'écho atténué à l'instant T_{echo}.

Si j'émets deux sons brefs l'un après l'autre, je recevrais l'écho de mes deux sons et ainsi du suite. On peut donc dire que mon canal (ma chambre d'écho) s'exprime par :

$$\text{Chambre}(t)=\delta(t)+A\delta(t-T_{echo}).$$

Si j'émet une mélodie nommée s(t), je vais recevoir :

$$s_{recu}(t)=s(t)+As(t-T_{echo}).$$

II-2) Fonction de convolution : définition et propriété

Soient x(t), un signal et h(t) l'équation de mon canal. Alors, en sortie de mon canal , je récupère un signal y(t) telle que y(t)=x(t)*h(t) le produit de convolution de x et h.

On dit y est égal à x convolué avec h

Par définition, $y(t) = x * h = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$ eq 4.1

On note X(f), Y(f) et H(f) la transformée de Fourier respectivement de x(t), y(t) et h(t)

H(f) représente la fonction de transfert de mon canal (il peut s'agir d'un filtre).

Exemple des Filtres

Lorsqu'on étudie un filtre, on émet un signal sinusoïdal à une fréquence donnée et on mesure l'atténuation à cette fréquence. On augmente ensuite la fréquence et on re-commence l'opération. On trace ainsi la caractéristique d'un filtre en fréquentielle H(f).
Le fait d'émettre un signal sinusoïdal à une fréquence f_1, correspond à l'émission d'un dirac à la fréquence f_1. Soit H(f), la fonction de transfert du filtre, on récupère donc le signal défini par

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \qquad \text{eq 4.2}$$

Il s'agit du produit de convolution entre le filtre et le signal d'entrée.

Propriété de la fonction de convolution

La *convolution* est une opération couramment utilisée dans le domaine du traitement du signal car elle apporte des résultats rapides par passage de la FFT. Elle est l'analogue de la multiplication spectrale dans le domaine temporelle et inversement, c'est-à-dire qu'une multiplication de deux signaux, terme à terme dans le modèle temporelle, se traduira comme une convolution des spectres des deux signaux :

Théorème de Plancherel :
Si : $y(t) = h(t).x(t)$ alors $Y(f) = H(f) * X(f)$ eq 3.1

Et inversement : si $y(t) = x(t) * h(t)$ alors, Y(f)=X(f).H(f).

Propriété du Dirac

Soit un signal x(t), le produit de x(t) par un dirac à l'instant nT donne l'amplitude du signal à l'instant nT et une amplitude nulle entre deux instants, soit x(t).δ(nT)=x(nT) (cf. échantillonnage).

Par conséquent, en fréquentiel nous aurons la même propriété (une fonction à la même caractéristique quelle que soit la variable)

$X(f).\delta(f-F_i)=X(F_i)$, l'amplitude de X(f) à la fréquence F_i.

<u>Retour sur l'exemple du filtre : Convolution Temporel – Produit Fréquentiel:</u>

Nous savons qu'émettre un signal sinusoïdal à une fréquence f_l, correspond à l'émission d'un dirac à la fréquence f_l.

Nous savons aussi, que le signal en sortie du filtre s'exprime :

- en temporel par : $y(t) = x(t) * h(t)$, avec $x(t)=\sin(2\pi F_i t)$
- en fréquentiel $Y(f)=X(f).H(f)= \delta(f-F_i).H(f)=H(F_i)$ soit la fonction de transfert du filtre à la fréquence F_i.

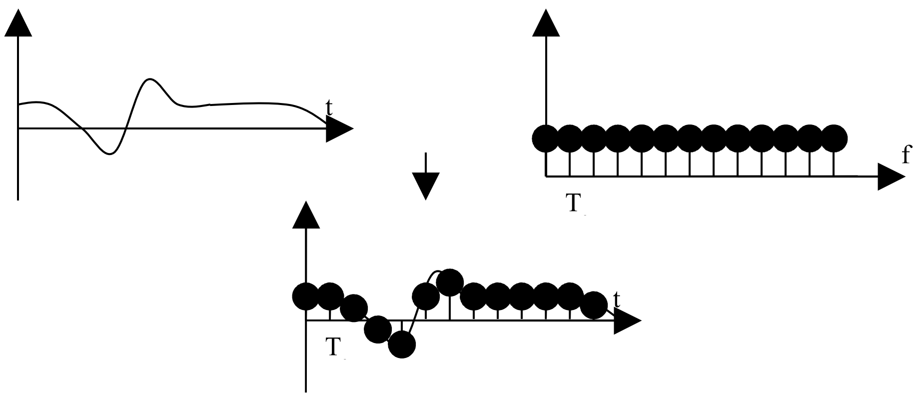
L'amplitude mesurée Y(f) à $f=F_i$ correspond donc à l'atténuation apportée par le canal à la fréquence F_i.

<u>Cas général :</u>

Soit H(f) un spectre contenu sur –Fmax à Fmax (quelconque). Dessiner H(f). Si X(f) est un dirac à la fréquence F_i, représenter graphiquement Y(f) par rapport à H(f).

<u>Opération d'échantillonnage : Produit Temporel – Convolution Fréquentiel:</u>

Echantillonner revient à prélever un signal x(t) périodiquement. Tout se passe comme si on multipliait le signal x(t) par un peigne de Dirac.

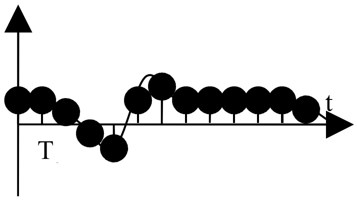


Au niveau fréquentiel, le spectre observé s'écrit : Y(f)=X(f)*P(f), où '*' représente la convolution, P(f) est le spectre du peigne de Dirac et X(f) le spectre du signal échantillonné.
Or, la Transformée de Fourier d'un peigne de dirac est un peigne de Dirac d'amplitude 1/Te.

On va admettre que la convolution X(f)*P(f) est définie par la périodisation du spectre X(f) autour de chaque fréquence nFe, n entier relatif. Nous démontrerons cela dans le 4ème paragraphe.

III. Transformée en Z et convolution

Sur la figure précédente, nous avons prélever l'évolution du signal x(t) aux instants nT_e.

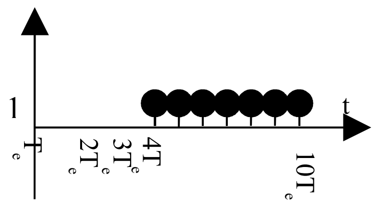


Soit x_0=x(0), x_1=x(Te), . .., x_k=x(kTe) l'amplitude du signal aux instants 0, T_e, …, kT_e.

Auparavant, on avait exprimé $x_e(t) = x(t).p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(t - nT_e)$

Nous allons maintenant écrire $X_e(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_e(n)Z^{-n}$, la transformée en Z de x_e. Cette écriture est toujours utilisée en électronique numérique et toutes fonctions mathématiques implémentées dans des circuits numériques sont conçues à partir de la transformée en Z.

Soit le signal carré Rect suivant, nous allons écrire l'équation en temporel et sa transformée en Z.



Alors $\mathrm{Re}ct_e(t) = \sum_{n=4}^{10} \delta(t - nT_e)$, il s'agit de la représentation discrétisée d'un signal rectangulaire.

On peut écrire sa transformée en Z : $\mathrm{Re}ct_e(Z) = \sum_{n=4}^{10} Z^{-n}$

Cette notion n'est qu'évoquée dans ce cours, vous verrez en mathématique l'existence de la Transformée en Z et ses propriétés.

Convolution

Nous pouvons définir de la même manière le produit de convolution dans le domaine discret.

Soit $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ deux signaux discrets définis par leur transformée en Z $X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n Z^{-n}$ et $Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n Z^{-n}$, où x_n et y_n représente la n-ième amplitude du signal discrètisé.

Soit z, la convoluée de x et y, alors la n-ième amplitude de z est calculée par :

$$z_n = x_n * y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k}$$

On retrouve la même formulation que celle établie en temporel, à savoir

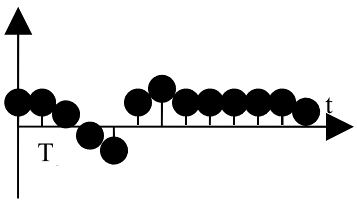
$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$, en remplacant l'intégrale par une sommation infinie τ devient k et t est remplacé par n.

Tout revient à prendre le signal x à l'instant 0 et de prendre y à l'instant n. On dessine les deux séquences l'une dessous l'autre en inversant y (on trace x(0) à x(n) et y(n) à y(0)). On fait ensuite le produit terme à terme et la sommation finale.

Application pratique :

<u>Cas 1 :</u> Soit un signal discrétisé $\{x_n\}$ défini par $X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n Z^{-n}$.

On peut représenter $\{x\}$ par :

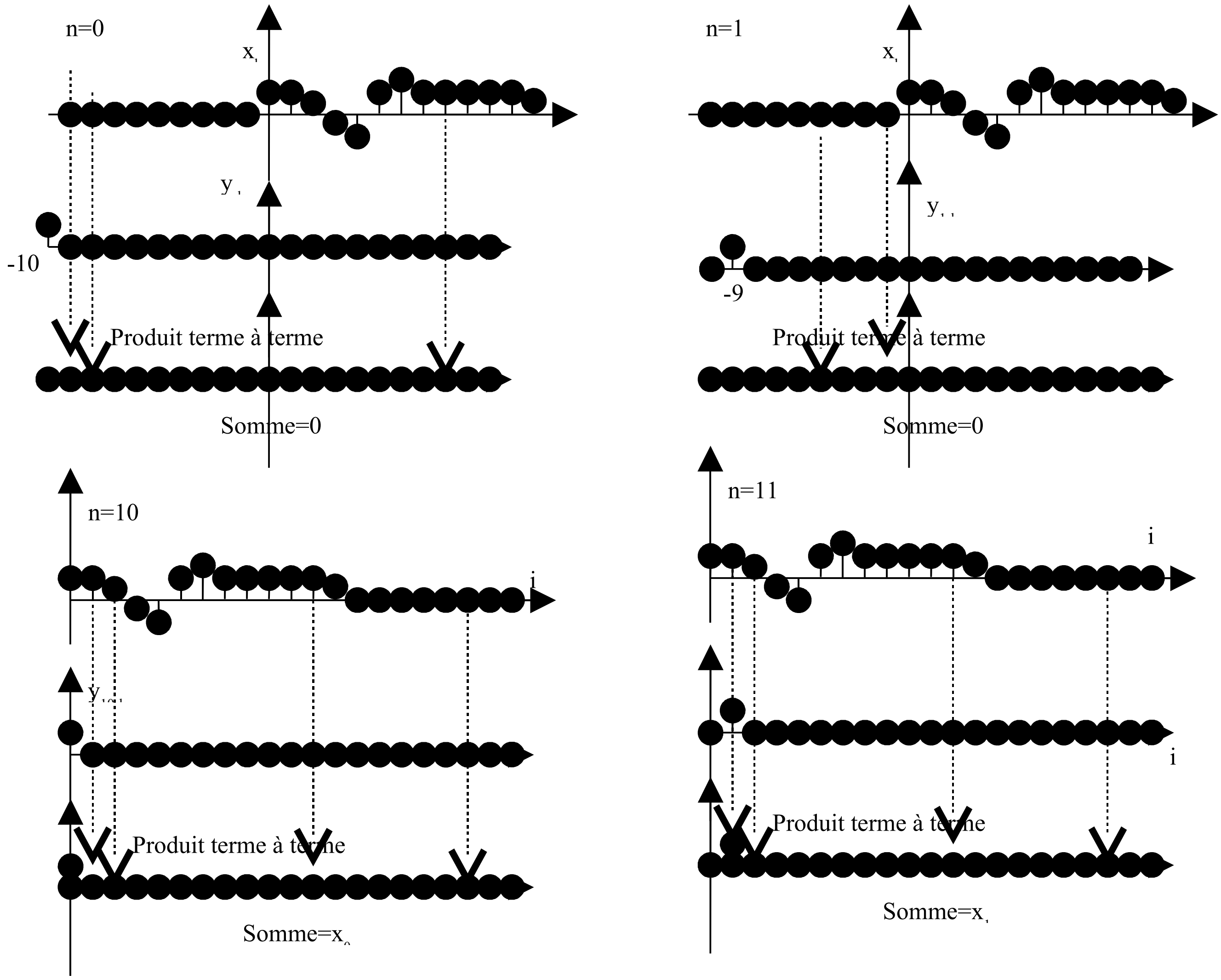


Soit $\{y\}$ défini par $Y(Z) = Z^{-10}$, c'est-à-dire un dirac au 10-ème échantillon. Calculons $z_n = x_n * y_n$, $y_i = 0$ si $i \neq 10$

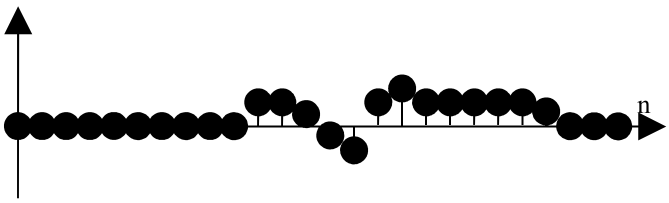
En reprenant l'équation mathématique, on va sommer terme à terme les coefficients de x_k, k étant défini de 0 à 12 (donc causal) au-delà tous les termes sont nuls, avec y_{n-k} Le premier élément de la convolution est z_0, calculé pour n=0.

$z_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{0-k}$, avec y_{0-k} est nul partout sauf pour 0-k=10 soit pour k=-10.

$z_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{1-k}$, avec y_{1-k} est nul partout sauf pour 1-k=10 soit pour k=-9.



Finalement, on va trouver la réponse suivante :



On retrouve la séquence {x} décalée, c'est à dire qui commence pour n=10. On rappelle que le résultat obtenu est la convolution de {x} avec un dirac à n=10, autrement dit, on trouve x_{n-10}.

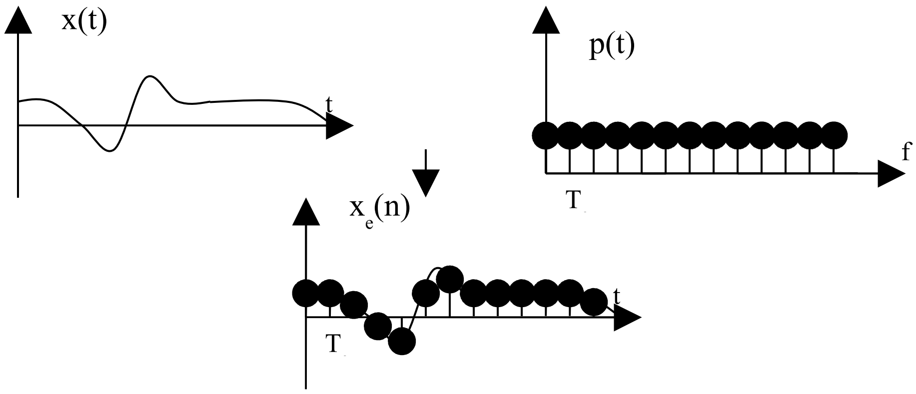
Cas 2 : Calculer zn, la convolution de Rect_e, défini par $\mathrm{Re}\,ct_e(Z) = \sum_{n=4}^{10} Z^{-n}$ par lui-même :

Ce calcul se fera en TD.

IV. Echantillonnage et condition de Shannon

L'étape d'échantillonnage d'un signal aux instants kT_e, k entier revient à discrétiser le signal en ne prélevant l'amplitude du signal aux instants kT_e.

Nous rappelons que l'on obtient l'exemple suivant :

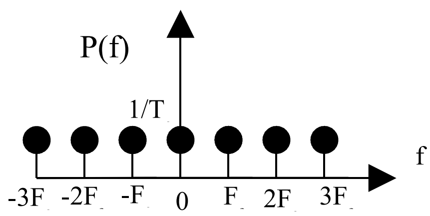


Tout revient à multiplier le signal x(t) par le peigne de Dirac soit $x_e(t)=x(t).p(t)$

Le fil conducteur est l'estimation du spectre. On sait que :

- Y(f)=X(f)*P(f), théorème de Plancherel
- La Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est un peigne de dirac, les raies sont espacées de Fe.
- La convolution d'un signal x(t) et d'un dirac δ(t-Te) est $x(t-T_e)$, c'est-à-dire x(t) déplacé autour de Te. Nous avons fait la démonstration avec les signaux discrets. Or, t n'étant qu'une variable, on obtient de même dans le domaine fréquentiel : La convolution du spectre X(f) et d'un dirac δ(f-Fe) est $X(f-F_e)$, c'est-à-dire X(f) déplacé autour de Fe.

Représentons P(f) :



$$P(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF_e)$$

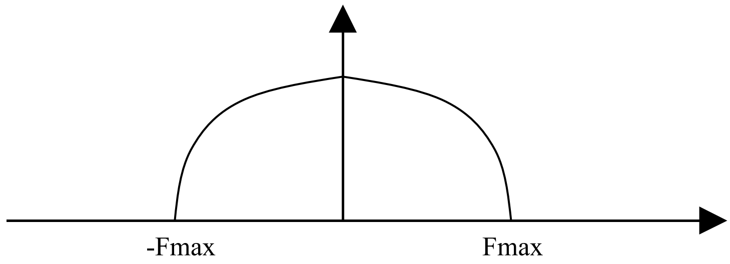
P(f) est donc constitué d'une infinité de Dirac.

Or, la convolution avec un dirac à F_e va déplacer le spectre autour de F_e, la convolution avec le dirac à $2F_e$ va déplacer le spectre autour de $2F_e$, la convolution avec le dirac autour de $-F_e$ va déplacer le spectre autour de $-F_e$.

Par conséquent, échantillonner un signal revient à périodiser son spectre autour de nF_e n entier relatif.

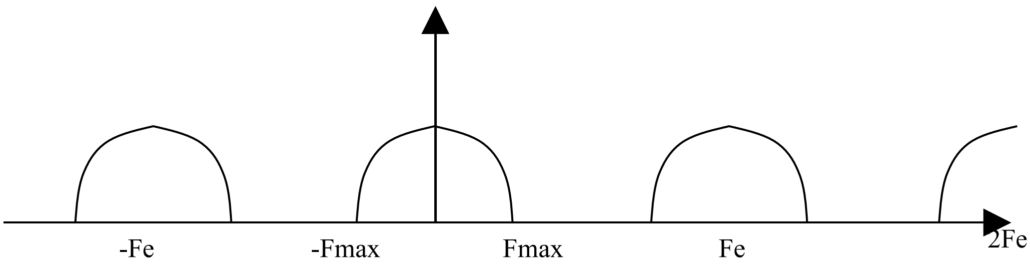
Plusieurs cas de figures se présentent :

Soit X(f), le spectre de x(t), spectre fini :



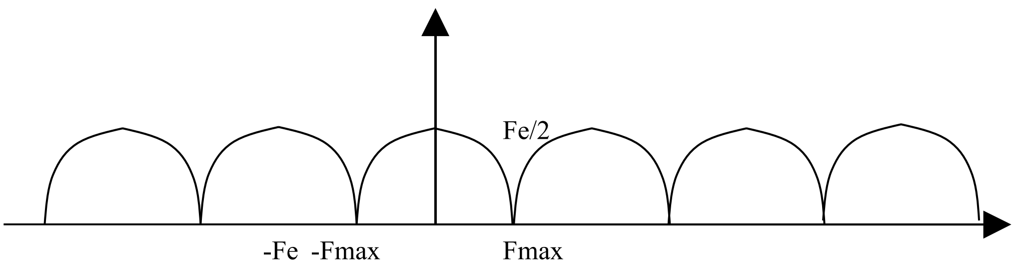
Quand on périodise le spectre de X(f) autour de nFe, on obtient les spectres suivant

Cas 1 : Fe>> Fmax



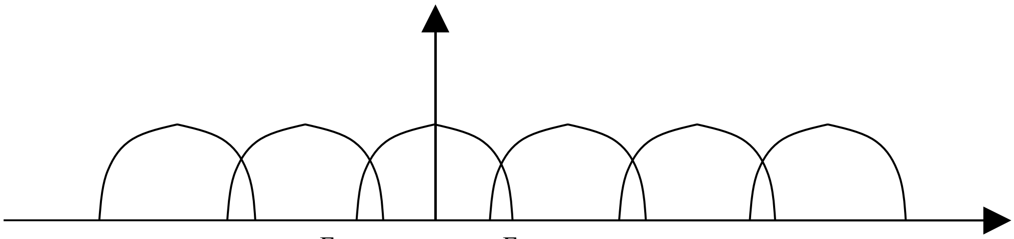
Les spectres sont correctement séparés. Le spectre autour de Fe ne vient pas perturber le spectre autour de 0, il n'y a pas d'interférence.

Cas 2 : Fe/2= Fmax



Les spectres sont contigus. Le spectre autour de Fe ne vient pas perturber le spectre autour de 0, il n'y a pas d'interférence mais on est à la limite

Cas 3 : Fe/2< Fmax



Les spectres se chevauchent, il y a une perturbation appelé bruit de repliement.
Si le signal x(t) est un signal audio, après échantillonnage, le signal audio est bruité par un signal basse fréquence autour de Fmax issu de la périodisation de Spectre.

CONDITION DE SHANNON

Pour éviter le repliement de spectre, on vérifiera que **Fe> 2.Fmax**. C'est la condition de SHANNON.

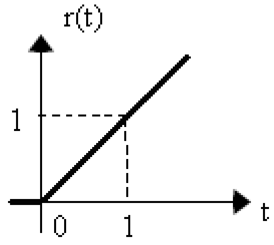
Application de cours :

A ce stade, l'étudiant doit être capable de représenter la transformée de Fourier d'un signal échantillonné et prendre conscience des limites imposées sur la fréquence

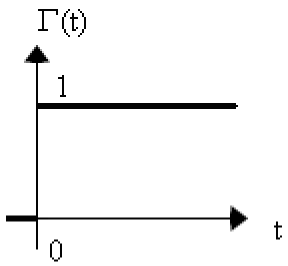
- TD n°4

ANNEXE A : Liste de fonctions déterministes

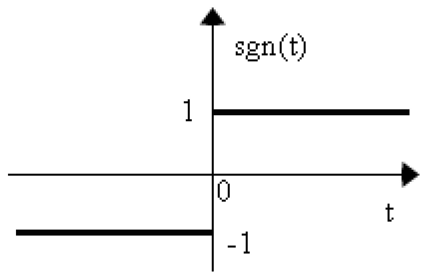
Rampe Unitaire :



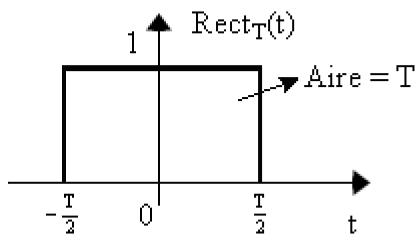
Echelon Heaviside (ou échelon unité)



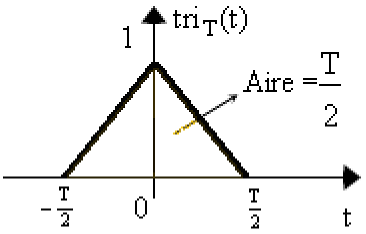
Fonction signe



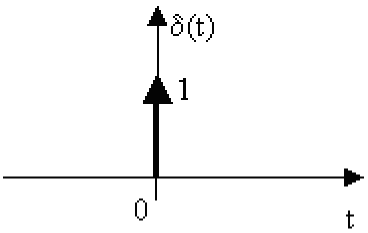
Fenêtre rectangulaire ou fonction porte



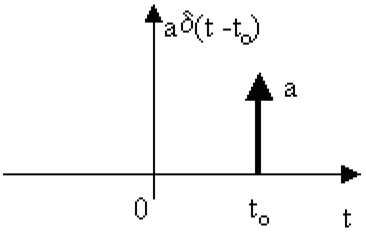
Fenêtre triangulaire (fonction Bartlett)



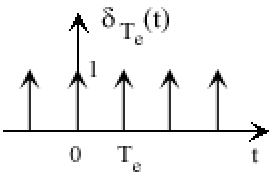
Impulsion de Dirac à l'instant initial d'aire unité



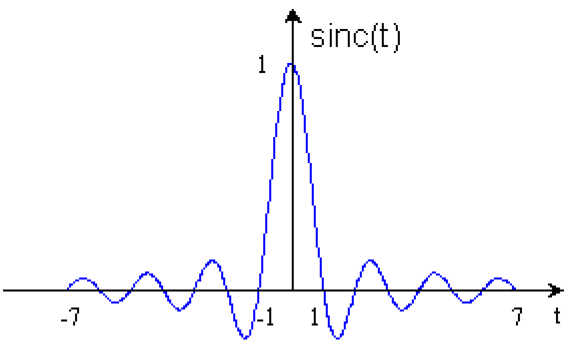
Impulsion de Dirac à l'instant t_0 d'aire a



Peigne de Dirac



Fonction sinus cardinal



ANNEXE B : Formules mathématiques

Relation Trigonométrique.

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$$
$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$$
$$\sin(A+B) = \cos(A)\sin(B) + \sin(A)\cos(B)$$
$$\sin(A-B) = \cos(A)\sin(B) - \sin(A)\cos(B)$$

Donc $\cos(A)\cos(B)=1/2[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$

Et évidemment, $\cos^2(X)+\sin^2(X)=1$.

En déduire $\cos^2(A)$ et $\sin^2(A)$ en fonction de $\cos(2A)$.

ANNEXE C : Série de Fourier de quelques fonctions

Table Série de Fourier.

Tout signal s(t) continu périodique, de période T = 1/f s'écrit de la manière suivante :

$s(t)= a_0+a_1\cos(2\pi ft)+ a_2\cos(2*2\pi ft)+ a_3\cos(3*2\pi ft)+\ldots a_n\cos(n*2\pi ft)+\ldots$
$+b_1\sin(2\pi ft)+ b_2\sin(2*2\pi ft)+ b_3\sin(3*2\pi ft)+\ldots b_n\sin(n*2\pi ft)+\ldots$

Avec :

s(t)	Coefficients de Fourier
$V\sin(2\pi ft)$	$a_n=0$; pour tout n $b_1=V$, $b_n=0$ pour tout entier n>1
$V\cos(2\pi ft)$	$a_0=0$, $a_1=V$, $a_n=0$; pour tout entier n>1 $b_n=0$; pour tout n
Carré d'amplitude V (pair) de tension continue A	$a_0=A$, $a_{2n+1}=(-1)^n.4V/[(2n+1)\pi]$, $a_{2n}=0$ $b_n=0$; pour tout n
Carré d'amplitude V (impair) de tension continue A	$a_0=A$, $a_n=0$; pour tout n $b_{2n+1}=4V/[(2n+1)\pi]$, $b_{2n}=0$ pour tout n
Triangulaire d'amplitude V de tension continue A	$a_0=A$, $a_{2n+1}=\pi V/([4*(2n+1)]^2$, $a_{2n}=0$, pour tout n $b_n=0$; pour tout n

ANNEXE D : Récapitulatif des formules et théorème à connaître

Longueur d'onde

La fréquence est inversement proportionnelle à la longueur d'onde selon la formule suivante (à retenir) dans le cas général:

$$\lambda = Tc = \frac{c}{f}$$ c est la célérité en m/s.

Dirac

L'impulsion de dirac est définie comme la limite d'une des fonctions ci-dessus lorsque le paramètre ε tend vers 0.

Donc :

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon -> 0} \Delta_{\varepsilon}(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

La **Moyenne** : par l'intégrale de la fonction sur une période (d'où la nécessité d'un signal périodique).

$$m = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

La **puissance** P ou **valeur efficace** $\mathbf{S_{eff}}$: par l'intégrale de la fonction au carré

$$S_{eff}^2 = P = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt$$

Energie totale :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt$$

Puissance moyenne totale :

$$P = \lim_{T -> \infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)dt$$

Rmq : Dans le cas d'un signal périodique, on retrouve $P = \lim_{T -> \infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)dt = P = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt$

Conversion Watt, dB, dBm

1 dB_W = 10 * log10(1 Watt)

$P_{dB,W} = 10*\log_{10}(P_W)$

On sait aussi que la puissance P est proportionnelle à la tension au carrée (résistance normalisée).

Donc, $P_{dB} = 10*\log_{10}(P_W) = 10*\log_{10}(V_{Volt}^2) = 20*\log_{10}(V)$.

$P_{dBm} = 10*\log_{10}(P_{mW})$. Les dBm font références à des mW.

SERIE DE FOURIER : Signal périodique

Soit t->x(t) un signal périodique de période T, quelconque alors x peut s'écrire de la manière suivante :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_p t) + b_n \sin(n\omega_p t) \qquad \text{(eq 3.1)}$$

avec :

$a_o = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$, est la composante continue

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\omega_p t)dt,\ b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(n\omega_p t)dt,\ n>1 \qquad \text{(eq 3.2)}$$

Les coefficients a_n et b_n sont appelés les coefficients de la série de Fourier, $\omega_p = 2\pi f_p$ est la pulsation avec f_p=1/T. Remarquez les indices relatifs à la période.

Analyse spectrale

$$x(t) = a_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\cos(2\pi F_p nt - \phi)\right)$$

avec $\frac{y}{x} = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \tan(\phi)$ soit $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \phi$ c'est-à-dire, puisque $x_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ et $y_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$, $\frac{y_n}{x_n} = \frac{b_n}{a_n}$

Mathématiquement, le module du **spectre** s'écrit dans ce cas :

$$X(f) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \delta(f - nF_p)$$

Transformée de FOURIER : Signal Non périodique

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Mais, on peut aussi passer du domaine fréquentiel au domaine temporel : A partir de la Transformée de Fourier X(f), on peut calculer le signal x(t) :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{+j2\pi ft} df \qquad (3.8)$$

Il s'agit de la **transformée de Fourier Inverse**.

Echantillonnage

L'étape d'échantillonnage d'un signal aux instants kT_e, k entier revient à discrétiser le signal en ne prélevant l'amplitude du signal aux instants kT_e.

Par conséquent, échantillonner un signal revient à périodiser son spectre autour de nF_e n entier relatif.

CONDITION DE SHANNON

Pour éviter le repliement de spectre, on vérifiera que **Fe> 2.Fmax**. C'est la condition de SHANNON.